

01/01/2024 (M)

[This question paper contains 16 printed pages.]

Your Roll No.....

Sr. No. of Question Paper : 591

G

Unique Paper Code : 2272101102

Name of the Paper : Introductory Mathematical
Methods for Economics

Name of the Course : B.A. (Hons) Economics –
DSC-2

Semester : I

Duration : 3 Hours

Maximum Marks : 90

Instructions for Candidates

1. Write your Roll No. on the top immediately on receipt of this question paper.
2. Answers may be written in English or Hindi, but same medium should be used throughout the paper.
3. There are 3 sections in all and all sections are compulsory.
4. All parts of a question must be answered together.
5. Use of simple calculator is allowed.
6. PwD marked questions are alternatives to be attempted only by PwD students.

P.T.O.



छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए ।
2. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए ।
3. कुल 3 खंड हैं और सभी खंड अनिवार्य हैं ।
4. सभी प्रश्नों के भागों का उत्तर एक साथ दिया जाना चाहिए ।
5. साधारण कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है ।
6. PwD चिह्नित प्रश्न केवल PwD छात्रों द्वारा हल किए जाने वाले विकल्प हैं ।

Section A (खंड क)

Attempt any Four (10×4=40)

किन्हीं चार प्रश्नों का उत्तर दीजिए ।

1. (a) For the following function

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

- (i) Find the Domain
- (ii) Find the Asymptotes

(b) Given $g(2) = -4$ and $g'(x) = \sqrt{(x^2 + 5)}$ for all x .

use linear approximation to estimate $g(2.05)$.

(5+5)

(क) निम्नलिखित फलन के लिए

$$f(x) = \ln(4 - x^2)$$

(i) डोमेन ज्ञात कीजिए।

(ii) अंततस्पर्शी रेखा ज्ञात कीजिए।

(ख) दिया गया $g(2) = -4$ और $g'(x) = \sqrt{(x^2 + 5)}$ सभी x

के लिए। अनुमान लगाने के लिए रैखिक सन्निकटन का उपयोग

कीजिए $g(2.05)$ ।

2. (a) Find the limit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{2}{3x} \right) \right]$$

Is the function continuous everywhere?

P.T.O.

$$(b) \text{ Let } f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{for } x < 2 \\ x^2 + 3 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

Find the inverse of f .

(5+5)

(क) सीमा ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 - \frac{2}{3x} \right) \right]$$

क्या फलन हर जगह निरंतर है?

$$(ख) \text{ Let } f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & \text{for } x < 2 \\ x^2 + 3 & \text{for } x \geq 2 \end{cases}$$

f का प्रतिलोम ज्ञात कीजिए ।

3. (a) Check the convergence of the following :

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} b \left(1 + \frac{p}{100} \right)^{-k} \quad P > 0$$

$$(ii) \left\{ (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

(b) Solve the following Inequality

$$\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1} \geq 1 \quad (5+5)$$

(क) निम्नलिखित के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$(i) \sum_{k=0}^{\infty} b \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{-k} \quad P > 0$$

$$(ii) \left\{ (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n} \right) \right\}$$

(ख) निम्नलिखित असमिका को हल कीजिए :

$$\frac{\frac{1}{y}-1}{\frac{1}{y}+1} \geq 1$$

4. (a) Let $A = \{x: x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$ and $B = \{x: x \in \mathbb{R}, |x-1| \geq 1\}$ where \mathbb{R} is real numbers, If $A \cup B = \mathbb{R} - D$, then find set D .

P.T.O.

(b) Draw the graph of $f(x) = \ln|x - 2|$ from the graph of $f(x) = \ln|x|$

*For PWD-

(b) For the following function, compute the derivative and the derivative of the inverse function:

$$f(x) = e^{x^3+1} \quad (5+5)$$

(क) माने $A = \{x: x \in \mathbb{R}, |x| < 1\}$ और $B = \{x: x \in \mathbb{R}, |x - 1| \geq 1\}$ जहाँ \mathbb{R} वास्तविक संख्या है, यदि $A \cup B = \mathbb{R} - D$, तो D ज्ञात कीजिए।

(ख) $f(x) = \ln|x|$ रेखाचित्र से $f(x) = \ln|x - 2|$ का रेखाचित्र बनाएं।

*दिव्यांग के लिए -

(ख) निम्नलिखित फलन के लिए, व्युत्क्रम फलन के व्युत्पन्न और व्युत्पन्न की गणना कीजिए:

$$f(x) = e^{x^3+1}$$

5. (a) (i) If x is restricted by the condition $0 < x < 2$,
Find the range that y can take, given

$$y = (x - 1)^2$$

- (ii) Show that $f(x) = 20x - e^{-4x}$ has exactly one
real root.

- (b) (i) Show that if F^{-1} exists then it is unique.

- (ii) Discuss the continuity of $|x| + |x - 1|$ in the
interval $[-1, 2]$ (5+5)

- (क) (i) यदि x को $0 < x < 2$ की स्थिति से प्रतिबंधित किया जाता
है, तो दी गई रेंज ज्ञात कीजिए जो y ले सकता है

$$y = (x - 1)^2$$

- (ii) Show that सटीक रूप से वास्तविक वर्ग है तो $f(x) =$
 $20x - e^{-4x}$ को दर्शाएं।

- (ख) (i) यदि F^{-1} उपस्थिति है, तो यह अनूठा है इसे दर्शाएं।

- (ii) $[-1, 2]$ के अंतराल में $|x| + |x - 1|$ की निरंतरता पर
चर्चा कीजिए।

P.T.O.

6. (a) Solve for x

$$[\ln(x + e)]^3 - [\ln(x + e)^2]^2 = \ln(x + e) - 4$$

(b) Suppose we know that $f(x)$ is continuous and differentiable on the interval $[-3, 4]$, that $f(-3) = 7$ and that $f'(x) \leq -17$. What is the largest possible value for $f(4)$? (5+5)

(क) हल कीजिए x

$$[\ln(x + e)]^3 - [\ln(x + e)^2]^2 = \ln(x + e) - 4$$

(ख) मान लीजिए कि हम जानते हैं कि $f(x)$ अंतराल $[-3, 4]$, पर निरंतर और भिन्न है, कि $f(-3) = 7$ और वह $f'(x) \leq -17$ है। $f(4)$ का सबसे बड़ा संभव मान क्या है?

Section B (खंड ख)

Attempt any Three ($10 \times 3 = 30$)

किन्हीं तीन का उत्तर दीजिए।

7. (a) Does f have a local maxima/minima? Is it global?
Is f differentiable at 0. Identify the cusp

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x + 5)$$

(b) Show that $Ax = e^x$ has 2 solutions when $e < A < \infty$.
(5+5)

(क) क्या f के पास स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ है? क्या यह वैश्विक है? f 0 पर भिन्न है। शिखर को पहचानें

$$f(x) = x^{\frac{2}{3}}(2x+5)$$

(ख) जब $e < A < \infty$ होता है तो $Ax = e^x$ के दो हल हैं इसे दर्शाएं।

8. (a) Find Elasticity of y with respect to x when f is given by

$$x^3y^3 + 3x^3 = 2$$

(b) For what values of the numbers α and β does the function

$$f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$$

have the maximum value $f(2) = 1$. (5+5)

(क) x के सन्दर्भ में y की लोच ज्ञात कीजिये जब इसे किसके द्वारा दिया जाता है

$$x^3y^3 + 3x^3 = 2$$

(ख) α और β संख्याओं के किन मानों के लिए फलन हैं?

$$f(x) = \alpha x e^{-\beta x}$$

अधिकतम मान है $f(2) = 1$.

9. (a) Let α and β be positive constants. Find

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 + x^\alpha)^{-\beta}}{x}$$

(b) It is estimated that t years from now the population of a certain town will be

$$F(t) = 40 - \frac{8}{t+2} \text{ million.}$$

Use differentials to estimate the amount by which population will increase during the next 6 months.

(5+5)

(क) मान लीजिए कि α और β धनात्मक स्थिरांक हैं। ज्ञात कीजिए कि

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 + x^\alpha)^{-\beta}}{x}$$

(ख) यह अनुमान लगाया गया है कि अब से t वर्ष बाद एक निश्चित शहर की जनसंख्या होगी

$$F(t) = 40 - \frac{8}{t+2} \text{ मिलियन.}$$

उस राशि का अनुमान लगाने के लिए विभेदक का उपयोग कीजिए जिसके द्वारा जनसंख्या में वृद्धि होगी अगले 6 महीने।

10. (a) Show that the tangent to the curve $y = x^3$ at any point meets the curve again at point z where the slope is four times the slope at (c, c^3) .
- (b) If f and g are continuous functions in $[a, b]$ such that $f(a) > g(a)$ and $f(b) < g(b)$. Prove the existence of c within (a, b) such that $f(c) = g(c)$.

(5+5)

(क) दर्शाएं कि वक्र $y = x^3$ की स्पर्शरेखा किसी भी बिंदु z पर वक्र से फिर से मिलती है जहां प्रवणता (c, c^3) पर प्रवणता चार गुना है।

P.T.O.

(ख) यदि f और g $[a, b]$, में निरंतर फलन हैं जैसे कि $f(a) > g(a)$ और $f(b) < g(b)$, (a, b) के भीतर c के अस्तित्व को इस प्रकार सिद्ध कीजिए कि $f(c) = g(c)$ ।

Section C (खंड ग)

Attempt any Two ($10 \times 2 = 20$)

किन्हीं दो का उत्तर दीजिए ।

11. (a) Find the third degree Taylor formula for $\ln(1 + x)$ at 0. Use this to approximate $\ln(1.1)$. Estimate the upper bound to the error $R_3(x)$.
- (b) Show that the function $f(x) = x|x|$ has an inflection point at $(0,0)$ but $f''(0)$ does not exist. Draw the graph. (5+5)

*For PWD-

- (b) Use linear approximation to estimate the value of the given quantity

(33)^(1/5)

(क) 0 पर $\ln(1+x)$ के लिए थर्ड डिग्री टेलर सूत्र ज्ञात कीजिये। इसका उपयोग $\ln(1.1)$ त्रुटि $R_3(x)$ के लिए ऊपरी सीमा का अनुमान लगाने के लिए कीजिए।

(ख) दर्शाएं कि फलन $f(x) = x|x|$ $(0,0)$ पर एक परिवर्तन बिंदु है लेकिन $f''(0)$ मौजूद नहीं है। रेखाचित्र बनाएं।

*दिव्यांग के लिए -

(ख) दी गई मात्रा के मान का अनुमान लगाने के लिए रैखिक सन्निकटन का उपयोग कीजिए

$$(33)^{(1/5)}$$

12. For the following function (10)

$$f(x) = \frac{3}{x^4 - x^2 + 1}$$

Determine :

- (a) The intervals for which the function is increasing/decreasing.
- (b) Find the points of local maxima and minima.
- (c) Find the global maxima and minima.

P.T.O.

निम्नलिखित फलन के लिए

$$f(x) = \frac{3}{x^4 - x^2 + 1}$$

निर्धारित कीजिए :

(क) वे अंतराल जिनके लिए फलन बढ़ रहा है/घट रहा है।

(ख) स्थानीय उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ के बिंदु ज्ञात कीजिए।

(ग) वैश्विक उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ का पता लगाएं।

13. (a) The population of a country grows according to the following function of time, t ;

$$P(t) = \frac{a}{b + e^{-at}}$$

- (i) Find dP/dt when $t=0$.
- (ii) Find the proportional rate of growth of the population.
- (iii) Show that the population has a limiting value and find its value.

(iv) At what time is the population rising most rapidly.

(b) The initial value of a rare diamond is given as

$$F(t) = 25000(1.75)^{4\sqrt{t}}$$

If the rate of interest is compounded continuously and is 7%, how long should the painting be held?

(5+5)

(क) किसी देश की जनसंख्या समय के निम्नलिखित फलन के अनुसार बढ़ती है, t ;

$$P(t) = \frac{a}{b + e^{-at}}$$

- (i) $t=0$ होने पर dP/dt ज्ञात कीजिये।
- (ii) जनसंख्या की वृद्धि की आनुपातिक दर ज्ञात कीजिये।
- (iii) दर्शाएं कि जनसंख्या का एक सीमित मान है और इसका मान ज्ञात कीजिए।
- (iv) किस समय जनसंख्या सबसे तेजी से बढ़ रही है।

P.T.O.

(ख) एक दुर्लभ हीरे का प्रारंभिक मूल्य क्या है।

$$F(t) = 25000(1.75)^{4\sqrt{t}}$$

यदि ब्याज की दर लगातार संयोजित होती है और 7% है, तो पेटिंग को कितने समय तक रखा जाना चाहिए?